A. ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong chương trình toán bậc trung học cơ sở, dạng toán “ Tìm giá trị nhỏ nhất hoặc giá trị lớn nhất của một biểu thức ” là một dạng toán thường được đưa ra trong các đề thi học kỳ, kiểm tra cuối chương,… nhằm dành cho các học sinh phấn đấu đạt điểm giỏi. Tuy nhiên, sách giáo khoa không dành tiết học nào cho riêng dạng bài này mà đưa ra như những bài tập nâng cao yêu cầu học sinh tự tìm tòi giải quyết theo gợi ý của giáo viên. Chính vì vậy học sinh thường gặp khó khăn khi giải các bài tập dạng này nên khả năng giải quyết và trình bày không được tốt.

Để giúp các em học sinh khá toán trong lớp có thể làm tốt dạng toán này, tôi đã dành thời gian nghiên cứu tài liệu và biên soạn hệ thống phương pháp cùng bài tập để đưa ra đề tài “ Phương pháp tìm giá trị nhỏ nhất hoặc giá trị lớn nhất của một biểu thức ” với mục đích giúp học sinh tiếp thu được dễ dàng hơn một dạng toán khó, đồng thời có dịp rèn luyện tư duy và phát huy được tính tích cực trong học tập cho học sinh. Khi học sinh có kiến thức tốt về dạng toán này, các em sẽ được củng cố tốt hơn cả các bài toán nâng cao khác trong chương trình toán THCS như “ Chứng minh một biểu thức luôn nhận giá trị dương hoặc âm ”, “ Chứng minh bất đẳng thức “, …

Vì hiểu được vai trò quan trọng của dạng toán này và cũng thấy rõ các khó khăn của học sinh học tập cũng như giáo viên giảng dạy, tôi đã mạnh dạn viết tài liệu “ Phương pháp tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của một biểu thức ” để trước hết phục vụ cho công tác giảng dạy của chính mình, sau đó tạo điều kiện để bản thân có dịp trao đổi chuyên môn với các đồng nghiệp, nâng cao nghiệp vụ sư phạm và năng lực nghiên cứu khoa học của cá nhân.

B. NỘI DUNG ĐỀ TÀI

I. LÝ THUYẾT CHUNG

Xét biểu thức A(x) xác định $\forall x \in (a, b)$.

1. Bài toán 1: Để tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A(x) trên (a, b), ta cần tiến hành các bước:

a) Bước 1: Chứng tỏ rằng $A(x) \geq k$ (k là một hằng số) $\forall x \in (a, b)$.

b) Bước 2: Tìm giá trị $x = a$ để $A(x) = k$, tức là chỉ ra trường hợp để xảy ra dấu đẳng thức.

c) Kết luận: Giá trị nhỏ nhất của $A(x) = k$ khi $x = a$.

Ta thường dùng kí hiệu: $\min A(x) = k \Leftrightarrow x = a$.

2. Bài toán 2: Để tìm giá trị lớn nhất của biểu thức A(x) trên (a, b), ta cần tiến hành các bước:

a) Bước 1: Chứng tỏ rằng $A(x) \leq k$ (k là một hằng số) $\forall x \in (a, b)$.

b) Bước 2: Tìm giá trị $x = a$ để $A(x) = k$, tức là chỉ ra trường hợp để xảy ra dấu đẳng thức.

c) Kết luận: Giá trị lớn nhất của $A(x) = k$ khi $x = a$.

Ta thường dùng kí hiệu: $\max A(x) = k \Leftrightarrow x = a$.

3. Chú ý.

a) Với biểu thức chứa nhiều biến số cũng giải tương tự như trên.

b) Học sinh hay mắc phải sai lầm khi chỉ thực hiện bước 1 đã kết luận bài toán, dẫn đến kết quả sai. Vì vậy cần yêu cầu học sinh trình bày đầy đủ cả hai bước hết sức cẩn thận, không được thiếu bất cứ bước nào.

Ví dụ 1. Cho biểu thức: $A = x^2 + (x - 2)^2$.

Một học sinh đã tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A như sau:

"Ta có: $\forall x \in R$, $x^2 \geq 0$ và $(x - 2)^2 \geq 0$ nên $A \geq 0$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng 0."

Lời giải trên có đúng không ?

Giải. Lời giải trên không đúng. Học sinh trên đã mắc phải sai lầm là mới chứng tỏ rằng $A \geq 0$ nhưng chưa chỉ ra được trường hợp xảy ra dấu đẳng thức. Dấu đẳng thức không xảy ra vì không thể có đồng thời :

$x^2 = 0$ và $(x - 2)^2 = 0$.

Lời giải đúng như sau:

+) Ta có: $A = x^2 + (x - 2)^2 = x^2 + x^2 - 4x + 4 = 2x^2 - 4x + 4$

$= 2(x^2 - 2x + 1) + 2 = 2(x - 1)^2 + 2 \geq 2$, $\forall x \in R$.

+) Mà: $A = 2 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

+) Vậy: $\min A = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

c) Khi giải các bài toán tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của một biểu thức, ta cần nhớ các hằng bất đẳng thức sau:

1) $a^2 \geq 0$ (Tổng quát: $a^{2k} \geq 0$ với k nguyên dương).

Xảy ra dấu đẳng thức khi $a = 0$.

2) $-a^2 \leq 0$ (Tổng quát: $-a^{2k} \leq 0$ với k nguyên dương).

Xảy ra dấu đẳng thức khi $a = 0$.

3) $|a| \geq 0$. Xảy ra dấu đẳng thức khi $a = 0$.

4) $|a| \geq a$. Xảy ra dấu đẳng thức khi $a \geq 0$.

5) $-|a| \leq a \leq |a|$. Xảy ra dấu đẳng thức khi $a = 0$.

6) $|a+b| \leq |a| + |b|$. Xảy ra dấu đẳng thức khi $ab \geq 0$.

7) $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Xảy ra dấu đẳng thức khi $a = b$.

8) $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ với $a, b \geq 0$ (***Bất đẳng thức Côsi***).

Xảy ra dấu đẳng thức khi $a = b$.

9) $a \geq b$, $ab > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{a} \leq \dfrac{1}{b}$. Xảy ra dấu đẳng thức khi $a = b$.

10) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2$ với $ab > 0$. Xảy ra dấu đẳng thức khi $a = b$.

d) Khi tìm giá trị nhỏ nhất hoặc giá trị lớn nhất của một biểu thức, nhiều khi ta cần phải đổi biến.

e) Khi tìm giá trị nhỏ nhất hoặc giá trị lớn nhất của một biểu thức A với $A > 0$, trong nhiều trường hợp ta lại đi xét các biểu thức $\dfrac{1}{A}$ hoặc A^2.

Bài toán tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của một biểu thức là bài toán không đơn giản, vì vậy ở đây ta chỉ xét một số dạng biểu thức đặc biệt có công thức giải cơ bản, phù hợp với khả năng tiếp thu của số đông học sinh lớp 8.

II. MỘT SỐ DẠNG BIỂU THỨC CẦN TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, GIÁ TRỊ LỚN NHẤT THƯỜNG GẶP TRONG CHƯƠNG TRÌNH TOÁN LỚP 8

Dạng 1. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức có dạng tam thức bậc hai.

Phương pháp giải: Xét tam thức bậc hai $P = ax^2 + bx + c$.

* Nếu $a > 0$ thì P có giá trị nhỏ nhất. Ta biến đổi biểu thức P về dạng $aX^2 + k$ và có kết quả: $\min P = k \Leftrightarrow X = 0$.

* Nếu $a < 0$ thì P có giá trị lớn nhất. Ta cũng biến đổi biểu thức P về dạng $aX^2 + k$ và có kết quả: $\max P = k \Leftrightarrow X = 0$.

Ví dụ 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức:

a) $A = x^2 - 4x + 1$;

b) $B = 2x^2 - 8x + 1$;

c) $C = 3x^2 - 6x + 1$.

Giải.

a) $A = x^2 - 4x + 1 = (x^2 - 4x + 4) - 3 = (x-2)^2 - 3 \geq -3$.

$A = -3 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy: $\min A = -3 \Leftrightarrow x = 2$.

b) $B = 2x^2 - 8x + 1 = 2(x^2 - 4x + 4) - 7 = 2(x-2)^2 - 7 \geq -7$.

B = -7 $\Leftrightarrow$ x - 2 = 0 $\Leftrightarrow$ x = 2 .
Vậy: min B = -7 $\Leftrightarrow$ x = 2.

c) $C = 3x^2 - 6x + 1 = 3(x^2 - 2x + 1) - 2 = 3(x-1)^2 - 2 \geq -2$.

C = -2 $\Leftrightarrow$ x - 1 = 0 $\Leftrightarrow$ x = 1 .
Vậy: min C = -2 $\Leftrightarrow$ x = 1.

Ví dụ 3. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức:

a) $A = -x^2 - 4x + 1$;

b) $B = -2x^2 + 8x - 1$;

c) $C = -3x^2 - 6x + 5$.

Giải.

a) $A = -x^2 - 4x + 1 = -(x^2 + 4x + 4) + 5 = -(x+2)^2 + 5 \leq 5$.

A = 5 $\Leftrightarrow$ x + 2 = 0 $\Leftrightarrow$ x = -2 .
Vậy: max A = 5 $\Leftrightarrow$ x = -2.

b) $B = -2x^2 + 8x - 1 = -2(x^2 - 4x + 4) + 7 = -2(x-2)^2 + 7 \leq 7$.

B = 7 $\Leftrightarrow$ x - 2 = 0 $\Leftrightarrow$ x = 2 .
Vậy: max B = 7 $\Leftrightarrow$ x = 2.

c) $C = -3x^2 - 6x + 5 = -3(x^2 + 2x + 1) + 8 = -3(x+1)^2 + 8 \leq 8$.

C = 8 $\Leftrightarrow$ x + 1 = 0 $\Leftrightarrow$ x = -1 .
Vậy: max C = 8 $\Leftrightarrow$ x = -1.

**** Bài tập tự giải.***

Bài tập 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức:

a) $A = x^2 + x + 1$;

b) $B = x^2 - x + 1$;

c) $C = 2x^2 - 20x + 53$;

d) $D = 2x^2 + 3x + 1$.

Bài tập 2. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức:

a) $A = -x^2 + x + 1$;

b) $B = -x^2 - x + 1$;

c) $C = -2x^2 - 20x + 53$;

d) $D = -2x^2 + 3x + 1$;

e) $B = -5x^2 - 4x + 1$.

Dạng 2. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức có dạng đa thức bậc cao.

<u>Phương pháp giải:</u> Ta thường tìm cách biến đổi biểu thức đã cho về dạng 1 bằng cách đặt ẩn phụ thích hợp.

Ví dụ 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức:

a) $A = (x^2 + x + 1)^2$;

b) $B = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4$;

c) $C=(x-1)(x+2)(x+3)(x+6)$.

Giải.

a) Mặc dù A $\ge$ 0 nhưng giá trị nhỏ nhất của A không phải bằng 0 vì $x^2+x+1\ne 0, \forall x\in R$.

Ta có: $x^2+x+1=(x^2+x+\frac{1}{4})+\frac{3}{4}=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\ge\frac{3}{4}$.

Do đó: $A_{min}\Leftrightarrow(x^2+x+1)_{min}$.

Vậy: $\min A=(\frac{3}{4})^2=\frac{9}{16}\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$.

b) Ta có: $B=x^4-4x^3+5x^2-4x+4$

$= x^2(x^2-4x+4)+(x^2-4x+4)$

$= x^2(x-2)^2+(x-2)^2\ge 0$.

Mà: $B=0\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.\\x=2\end{cases}\Leftrightarrow$ x = 2.

Do đó: min B = 0 $\Leftrightarrow$ x = 2.

c) $C=(x-1)(x+2)(x+3)(x+6)$

$=[(x-1)(x+6)].[(x+2)(x+3)]$

$=(x^2+5x-6)(x^2+5x+6)=(x^2+5x)^2-36=[x(x+5)]^2-36\ge-36$.

$C=-36\Leftrightarrow x(x+5)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-5\end{array}\right.$.

Vậy: $\min C=-36\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-5\end{array}\right.$.

*** Bài tập tự giải – Bài tập 3:*** Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức:

a) $M=x^4-6x^3+10x^2-6x+9$;

b) $N=x(x-3)(x+1)(x+4)$;

c) $P=x^4-2x^3+3x^2-2x+1$;

d) $Q=(x^2-x)(x^2+3x+2)$.

Dạng 3. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức có dạng đa thức có chứa dấu giá trị tuyệt đối.

<u>Phương pháp giải.</u>

Dùng một trong các tính chất sau:

3) $|a|\ge 0$. Xảy ra dấu đẳng thức khi a = 0.

4) $|a|\ge a$. Xảy ra dấu đẳng thức khi a $\ge$ 0.

5) $-|a| \le a \le |a|$. Xảy ra dấu đẳng thức khi a = 0.

6) $|a+b| \le |a| + |b|$. Xảy ra dấu đẳng thức khi ab $\ge$ 0.

Ví dụ 5: Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức:

a) $A = 2x + |2x-5|$;

b) $B = |x-1| + |x-3|$;

c) $C = |x-1| + |x-2| + |x-3|$.

Giải.

a) Áp dụng tính chất 4, ta có:

$A = 2x + |2x-5| = 2x + |5-2x| \ge 2x + 5 - 2x = 5$.

$A = 5 \Leftrightarrow 5 - 2x \ge 0 \Leftrightarrow x \le \frac{5}{2}$.

Vậy: min A = 5 $\Leftrightarrow$ $x \le \frac{5}{2}$.

b) Áp dụng tính chất 6, ta có:

$B = |x-1| + |x-3| = |x-1| + |3-x| \ge |x-1+3-x| = 2$.

$B = 2 \Leftrightarrow (x-1)(3-x) \ge 0 \Leftrightarrow 1 \le x \le 3$.

Vậy: min B = 2 $\Leftrightarrow$ $1 \le x \le 3$.

c) Áp dụng tính chất 6 và tính chất 3, ta có:

+) $|x-1| + |x-3| = |x-1| + |3-x| \ge |x-1+3-x| = 2$.

Dấu bằng xảy ra khi $(x-1)(3-x) \ge 0 \Leftrightarrow 1 \le x \le 3$.

+) $|x-2| \ge 0$ và dấu bằng xảy ra khi x – 2 = 0 $\Leftrightarrow$ x = 2.

Do đó: $C = |x-1| + |x-2| + |x-3| \ge 2 + 0 = 2$. Dấu bằng xảy ra khi x = 2.

Vậy: min C = 2 $\Leftrightarrow$ x = 2.

**** Bài tập tự giải – Bài tập 4.*** Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức:

a) $A = |x| + |x-1|$;

b) $B = 4x^2 + 4x - 6|2x+1| + 6$;

c) $C = |x-2| + |x-5|$.

Dạng4. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức dạng phân thức có tử là hằng số và mẫu là tam thức bậc hai .

Phương pháp giải. Sử dụng tính chất 9:

a $\ge$ b, ab > 0 $\Rightarrow \frac{1}{a} \le \frac{1}{b}$. Xảy ra dấu đẳng thức khi a = b.

Ví dụ 6. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $M = \frac{3}{4x^2 - 4x + 5}$.

Giải.

+) Ta có: $M = \dfrac{3}{4x^2 - 4x + 5} = \dfrac{3}{(2x-1)^2 + 4}$.

Mà: $(2x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow (2x-1)^2 + 4 \geq 4 \Rightarrow M = \dfrac{3}{(2x-1)^2 + 4} \leq \dfrac{3}{4}$.

+) $M = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

Vậy: $\max\ M = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

* ***Chú ý.*** Với biểu thức dạng này, cần lưu ý học sinh tránh sai lầm sau: Lập luận rằng M có tử là hằng số nên M lớn nhất khi mẫu nhỏ nhất. Ta sẽ thấy rõ sai lầm đó qua bài giải sau.

Để tìm giá trị lớn nhất của phân thức $A = \dfrac{1}{x^2 - 3}$, ta lập luận:

+) $x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 3 \geq -3 \Rightarrow \dfrac{1}{x^2 - 3} \leq -\dfrac{1}{3}$ **.**

+) $A = \dfrac{-1}{3} \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy: $\max\ A = \dfrac{-1}{3} \Leftrightarrow x = 0$.

Nhưng ta dễ dàng nhận thấykết quả này sai, vì với x = 2 thì A = 1 > $\dfrac{-1}{3}$.

Sai lầm ở chỗ: Từ -3 < 1, không thể suy ra $\dfrac{1}{-3} > \dfrac{1}{1}$, vì -3 và 1 không cùng dấu.

Tổng quát: Từ a < b, chỉ suy ra được $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$ khi a và b là hai số cùng dấu.

* ***Bài tập tự giải – Bài tập 5.*** Tìm giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất của các biểu thức:

a) $A = \dfrac{1}{9x^2 - 6x + 7}$;

b) $B = \dfrac{6}{4x - x^2 - 6}$;

c) $C = \dfrac{1}{2x - x^2 - 4}$;

d) $D = \dfrac{3x^2 + 6x + 10}{x^2 + 2x + 3}$;

e) $E = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

Dạng 5. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức dạng phân thức có mẫu là bình phương của một nhị thức bậc nhất.

Phương pháp giải: Để tìm giá trị nhỏ nhất hoặc giá trị lớn nhất của biểu thức A có dạng $\frac{M(x)}{(ax+b)^2}$, ta viết tử thức M(x) dưới dạng luỹ thừa của ax + b, sau đó chia tử thức cho mẫu thức để viết A dưới dạng tổng các phân thức mới có tử thức là hằng số còn mẫu thức là luỹ thừa của nhị thức ax + b:

$$A = m(x) + \frac{n}{ax+b} + \frac{p}{(ax+b)^2}.$$

Dùng phương pháp đổi biến, đặt $y = \frac{1}{ax+b}$, ta đưa được A về dạng 1 hoặc dạng 2, từ đó giải quyết được bài toán.

Ví dụ 7. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \frac{x^2+x+1}{(x+1)^2}$.

Giải.

Viết tử thức dưới dạng luỹ thừa của x + 1, rồi đổi biến, đặt $y = \frac{1}{x+1}$ ta có:

$$A = \frac{(x^2+2x+1)-(x+1)+1}{(x+1)^2} = 1 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= 1 - y + y^2 = (y - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}.$$

$$\text{Min } A = \frac{3}{4} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 1.$$

*** Bài tập tự giải.***

Bài tập 6: Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức:

a) $A = \frac{2x+1}{x^2}$;

b) $B = \frac{4x^2-2x+1}{x^2}$;

c) $C = \frac{x^2-3x+3}{x^2-2x+1}$;

d) $D = \frac{2x^2-6x+5}{x^2-2x+1}$.

Bài tập 7: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = \frac{x}{(x+1)^2}$.

Dạng 6. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của các phân thức khác.

Ví dụ 8. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$A = \frac{2x+1}{x^2+2}.$$

Giải.

+) Để tìm giá trị nhỏ nhất của A, ta viết A dưới dạng:

$$A = \frac{2x+1}{x^2+2} = \frac{4x+2}{2(x^2+2)} = \frac{(x^2+4x+4)-(x^2+2)}{2(x^2+2)}$$

$$= \frac{(x+2)^2}{2(x^2+2)} - \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}.$$

Vậy: $\min A = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -2$

+) Để tìm giá trị lớn nhất của A, ta viết A dưới dạng:

$$A = \frac{2x+1}{x^2+2} = \frac{x^2+2-x^2+2x-1}{x^2+2} = \frac{(x^2+2)-(x-1)^2}{x^2+2}$$

$$= 1 - \frac{(x-1)^2}{x^2+2} \leq 1.$$

Vậy: $\max A = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

Ví dụ 9. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$B = \frac{4x+3}{x^2+1}.$$

Giải.

+) Để tìm giá trị nhỏ nhất của B, ta viết B dưới dạng:

$$B = \frac{4x+3}{x^2+1} = \frac{(x^2+4x+4)-(x^2+1)}{x^2+1}$$

$$= \frac{(x+2)^2}{x^2+1} - 1 \geq -1.$$

Vậy: $\min B = -1 \Leftrightarrow x = -2$

+) Để tìm giá trị lớn nhất của B, ta viết B dưới dạng:

$$B = \frac{4x+3}{x^2+1} = \frac{4x^2+4-4x^2+4x-1}{x^2+1} = \frac{4(x^2+1)-(2x-1)^2}{x^2+1}$$

$$= 4 - \frac{(2x-1)^2}{x^2+1} \leq 4.$$

Vậy: $\max B = 4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

**** Bài tập tự giải.***

Bài tập 8.

Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức: $M = \frac{3-4x}{1+x^2}$.

Bài tập 9. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $N = \frac{3x^2+14}{x^2+2}$.

Dạng 7. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức có chứa hai (hoặc nhiều) biến.

Ví dụ 10: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = x^2 + y^2 - 2(x - y)$.

Giải.

Ta có: $A = x^2 + y^2 - 2x + 2y$

$= (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 2y + 1) - 2$

$= (x-1)^2 + (y+1)^2 - 2 \geq 2$.

Vậy: $\min A = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$.

Ví dụ 11: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $B = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ với $x > 0$, $y > 0$.

Giải.

Ta có: $B = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{x^2+y^2}{xy} - 2 + 2$

$= \frac{x^2+y^2-2xy}{xy} + 2 = \frac{(x-y)^2}{xy} + 2 \geq 2$ (vì $x > 0$, $y > 0$).

Vậy: $\min B = 2 \Leftrightarrow x = y$.

Ví dụ 12: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$C = x^6 + y^6$ biết $x^2 + y^2 = 1$.

Giải.

Ta có: $C = x^6 + y^6 = (x^2)^3 + (y^2)^3 = (x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4)$.

Vì $x^2 + y^2 = 1$ nên $C = x^4 - x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 3x^2y^2$

$= 1 - 3x^2y^2 \leq 1$.

Dấu bằng xảy ra khi $x^2y^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $y = 0$.

Vậy: $\max C = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}\end{array}\right.$.

*** Bài tập tự giải.**

Bài tập 10. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức:

a) $A = x^2 - 2x + y^2 + 4y + 5$;

b) $B = xy(x - 2)(y + 6) + 12x^2 - 24x + 3y^2 + 18y + 36$;

c) $C = (x - ay)^2 + 6(x - ay) + x^2 + 16y^2 - 8xy + 2x - 8y + 10$.

Bài tập 11. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$A = 4x + 6y - x^2 - y^2 + 2$.

Bài tập 12.

a) Cho x – y = 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = x^3 + y^3$

b) Cho x – y = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của $B = 2x^2 + y^2$

Bài tập 13.

Chứng minh rằng nếu hai số có tổng không đổi thì tích của chúng lớn nhất khi và chỉ khi hai số đó bằng nhau.

Áp dụng mệnh đề trên tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:

a) $A = x^2(8 - x^2)$;

b) $B = x^3(16 - x^3)$;

c) $C = (1 - x)(2 - x)$ với $\frac{1}{2} < x < 1$.

Bài tập 14.

Chứng minh rằng nếu hai số dương có tích không đổi thì tổng của chúng nhỏ nhất khi và chỉ khi hai số đó bằng nhau.

Áp dụng mệnh đề trên tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau (với $x > 0$) :

a) $A = \dfrac{2x^2 + 1}{x}$;

b) $B = \dfrac{4x^2 + 1}{x}$;

c) $C = \dfrac{x^2 + 8x + 64}{2x}$;

d) $D = \dfrac{x^2 + 15x + 16}{3x}$;

e) $E = \frac{(x+1)^2}{x}$;

f) $F = x + \frac{1}{x-1}$.

C. KẾT LUẬN

Trên đây là những nội dung tôi đã nghiên cứu và biên soạn trước hết nhằm củng cố và sắp xếp có hệ thống các kiến thức cơ bản về dạng toán " Tìm giá trị nhỏ nhất hoặc giá trị lớn nhất của một biểu thức " với một số dạng biểu thức thường gặp trong chương trình đại số lớp 8 cho chính bản thân, sau đó tôi đã dùng làm tài liệu để giảng dạy cho các em học sinh lớp 8 với mục đích bồi dưỡng thêm kiến thức cho các em học sinh khá giỏi về một dạng toán nâng cao thường gặp trong các đề thi và kiểm tra. Tôi rất mừng vì nhờ sự sắp xếp rõ ràng, đưa kiến thức từ đơn giản đến phức tạp dần trong tài liệu nên các em học sinh từ lúc cảm giác sợ và nghĩ đây là dạng toán khó, đến khi tham gia học lại đều cảm thấy hào hứng và làm bài tập rất tốt. Tôi mạnh dạn trình bày tài liệu này như một sáng kiến kinh nghiệm nhỏ nhưng rất cần cho các giáo viên trực tiếp giảng dạy toán THCS như chúng tôi và rất mong được sự giúp đỡ, đóng góp ý kiến của các Thầy Cô giáo giàu kinh nghiệm, chuyên môn giỏi trong Tổ Tự nhiên I Trường THCS Nguyễn Trường Tộ để tôi có điều kiện học tập nâng cao năng lực sư phạm và trình độ chuyên môn giúp cho công tác giảng dạy được ngày càng tốt hơn. Tôi xin trân trọng cám ơn!

Hà Nội, tháng 4 năm 2009

Người viết

Nguyễn Thuý Hằng

D. TÀI LIỆU THAM KHẢO

1) Một số vấn đề phát triển Đại số 8, Vũ Hữu Bình, Nhà xuất bản giáo dục.
2) Ôn luyện toán trung học cơ sở, Vũ Hữu Bình, Nhà xuất bản Hà Nội.
3) Sách bài tập toán 8, Tôn Thân (chủ biên), Nhà xuất bản giáo dục.
4) Sách giáo khoa toán 8, Tôn Thân (chủ biên), Nhà xuất bản giáo dục.
5) Toán bồi dưỡng học sinh lớp 8, Vũ Hữu Bình – Tôn Thân - đỗ Quang Thiều, Nhà xuất bản giáo dục.
6) Toán nâng cao và các chuyên đề Dại số 8, Nguyễn Ngọc Đạm – Nguyễn Việt Hải – Vũ Dương Thụy, Nhà xuất bản giáo dục.

MỤC LỤC

Nội dung	Trang
A. ĐẶT VẤN ĐỀ	1
B. NỘI DUNG ĐỀ TÀI	2
I. LÝ THUYẾT CHUNG	2
II. MỘT SỐ DẠNG BIỂU THỨC CẦN TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, GIÁ TRỊ LỚN NHẤT THƯỜNG GẶP TRONG CHƯƠNG TRÌNH TOÁN LỚP 8	3
Dạng 1. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức có dạng tam thức bậc hai.	3
Dạng 2. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức có dạng đa thức bậc cao.	4
Dạng 3. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức có dạng đa thức có chứa dấu giá trị tuyệt đối.	5
Dạng4. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức dạng phân thức có tử là hằng số và mẫu là tam thức bậc hai .	6
Dạng 5. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức dạng phân thức có mẫu là bình phương của một nhị thức bậc nhất.	7
Dạng 6. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của các phân thức khác.	8
Dạng 7. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức có chứa hai (hoặc nhiều) biến.	10
C. KẾT LUẬN	12
D. TÀI LIỆU THAM KHẢO	13

Ý KIẾN NHẬN XÉT
CỦA TỔ TRƯỞNG CHUYÊN MÔN VÀ BAN GIÁM HIỆU

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO QUẬN ĐỐNG ĐA
TRƯỜNG TRUNG HỌC CƠ SỞ NGUYỄN TRƯỜNG TỘ

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

<u>Tên đề tài:</u>

PHƯƠNG PHÁP TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA MỘT BIỂU THỨC

Họ và tên: ***Nguyễn Thuý Hằng***
Chức vụ : Giáo viên
Tổ : Tự nhiên I
Trường : THCS Nguyễn Trường Tộ

HÀ NỘI, THÁNG 4 - 2009